جبور لي القابلة للحل:

تمهيد: ليكن A جبر لي فوق الحلقة (تبديلية وواحدية) R لنضع:

$$D^0A = A$$

$$D^1A = [A, A]$$

$$D^2A = [DA, DA]$$

$$\vdots$$

$$D^{k+1}A = [D^kA, D^kA]$$

ولأجل كل $n \in N$ نعرف D^nA بالشكل:

$$D^nA = [D^{n-1}A, D^{n-1}A]$$

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ:

1- أياً كان $n \in N$ فإن D^nA مثالي مميز في A

2- أياً كان $n \in N$ فإن $D^{n+1}A \subseteq D^nA$

البرهان:

1- نعلم أن A مثالي مميز في A

ومنه فإن D^0A، D^1A، D^2A ← جداء مثاليين مميزين مثالي مميز

جميعها مثاليات مميزة في A

لنفترض أنه لأجل $k \in N$ فإن D^kA مثالي مميز في A

عندئذ:

$$D^{k+1}A = [D^kA, D^kA]$$

وبما أن D^kA مميز فإن جداء مثاليين مميزين هو مثالي مميز فإن $D^{k+1}A$ مثالي مميز

إذاً لأجل $\forall n \in N$ فإن D^nA مثالي مميز في A.

الموضوع : ....

2- بالاستقراء حسب n

من أجل $n=0$: $DA=[A,A]\subseteq A=D^0A$

$n=1$: $D^2A=[DA,DA]\subseteq[A,A]=DA$

لنفرض أنه لأجل $k\in\mathbb{N}$ فإن

$D^kA\subseteq D^{k-1}A$

عندئذ:

$D^{k+1}A=[D^kA,D^kA]\subseteq[D^{k-1}A,D^{k-1}A]$
$=D^kA$

ومنه لأجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن: $D^{n+1}A\subseteq D^nA$

* تمهيدية [2]: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ:

1- أيا كان $n\in\mathbb{N}$ فإن D^nA مثالي في A

2- أيا كان $n\in\mathbb{N}$ فإن: D^nA مثالي مميز في A

3- أيا كان $n\in\mathbb{N}$ فإن $D^{n+1}A$ مثالي في D^nA

4- أيا كان $n\in\mathbb{N}$ فإن $D^{n+1}A$ مودول جزئي في D^nA.

5- $A=D^0A\supseteq DA\supseteq D^2A\supseteq\dots$

البرهان:

[2] و [5] حسب التمهيديات السابقة.

1- ينتج من كون كل مثالي مميز في A هو مثالي في A.

3- من أجل $n=0$ لدينا $D^0A=A\supseteq DA=[A,A]$

وبما أن DA مثالي في A ~~فإنه مودول جزئي~~ $D^0A=$

من أجل $n=1$ فإن $D^2A=[DA,DA]\subseteq DA$

وبما أن D^2A مثالي في A يكون D^2A مثالي في DA

لنفرض أنه لأجل k فإن D^kA مثالي في $D^{k-1}A$

عندئذ: $D^{k+1}A=[D^kA,D^kA]\subseteq D^kA$

وهذا يبين أن $D^{k+1}A$ مثالي في D^k.

4. حسب [3] فإنه يكون مودول جزئي.

د) **تعريف:** ليكن A جبر لي فوق الحلقة R نقول عن A أنه «قابل للحل» إذا وجد عدد صحيح موجب $m \in N$ بحيث $D^mA=0$

- ونسمي أصغر عدد $m \in N$ يحقق $D^mA=0$ «بدليل قابلية الحل».

- ونقول عن المثالي I أنه قابل للحل في A إذا وجد $k \in N$ لأجله يكون $D^kI=0$.

- ونسمي أكبر مثالي قابل للحل في A «بأساس الجبر A»
ونرمز له $RadA$.

* **مبرهنة:** (فهنا نستعيض لاحظ استبدلنا الحلقة بحقل)
كل جبر لي فوق حقل K بعده 2 يكون قابل للحل.
([illegible] بعد الفضاء)

البرهان:

- نفرض أن A جبر لي فوق الحقل K وأن $\dim_K A = 2$
ولنفرض أن $S=\{e_1, e_2\} \subset A$ قاعدة للجبر A فوق K

• عندئذ: أيا كان $x \in A$ فإن x يكتب بصورة وحيدة على الشكل $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \; ; \; \alpha_1, \alpha_2 \in K$

ليكن $z \in DA$ حيث $DA = [A, A]$ عندئذ:
يوجد $x, y \in A$ بحيث $z = [x, y]$
نميز حالتين:

- **الحالة الأولى:** إذا كان $[e_1, e_2] = \alpha e_1$
حيث $0 \neq \alpha \in K$

وبما أن S قاعدة للجبر A فإن
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$ حيث $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ و $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$

الموضوع :

$z = [x, y] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2]$

$= [\alpha_1 e_1, \beta_1 e_1] + [\alpha_1 e_1, \beta_2 e_2] + [\alpha_2 e_2, \beta_1 e_1] + [\alpha_2 e_2, \beta_2 e_2]$

$= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{[e_1, e_1]}_{0} + \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1] + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{[e_2, e_2]}_{0}$

تبديلا

$= \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] - \alpha_2 \beta_1 [e_1, e_2]$

$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \underbrace{[e_1, e_2]}_{\alpha e_1}$

$z = \underbrace{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \alpha}_{\in K} e_1$

لنفرض أن $\lambda = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\alpha$

نجد أن $\lambda = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)\alpha$

$z = \lambda e_1$

وهذا يبين أن $DA = \{\mu e_1 ; \mu \in K\}$ فضاء جزئي في A لبعد 1

أي أن $DA \neq 0$

لبيكن : $z_0 \in D^2A$ حيث $D^2A = [DA, DA]$ عندئذ يوجد :

$x_0, y_0 \in DA$ بحيث $z_0 = [x_0, y_0]$

ومنه فإن $x_0 = u e_1 , y_0 = v e_1$

حيث $u, v \in K$

$z_0 = [x_0, y_0] = [u e_1, v e_1] = u \cdot v [e_1, e_1] = 0$

ومنه فإن $D^2A = 0$ وهذا يبين أن A قابل للحل.

لنفس الطريقة نجد أنه إذا كان $[e_1, e_2] = \beta e_2$ حيث $\beta \in K$ فإن A قابل للحل

1/11/19

الموضوع: 11

الحالة الثالثة:

إذا كان $[e_1, e_2] = \alpha e_1 + \beta e_2$; $\alpha, \beta \in K$

$\alpha \neq 0 , \beta \neq 0$

لنفرض أن $e'_1 = \alpha e_1 + \beta e_2 \in A$

$e'_2 = \alpha e_1 - \beta e_2 \in A$

لنبرهن على أن المجموعة $\{e'_1, e'_2\}$ مستقلة خطياً فوق K

ليكن $\lambda, \mu \in K$ بحيث $\lambda e'_1 + \mu e'_2 = 0$

ولنثبت أن $\lambda = \mu = 0$

$\lambda \alpha e_1 + \lambda \beta e_2 + \mu \alpha e_1 - \mu \beta e_2 = 0$

$(\lambda + \mu)\alpha e_1 + (\lambda - \mu)\beta e_2 = 0$

$(\lambda + \mu)\alpha = 0 \Rightarrow \lambda + \mu = 0$ $\quad \alpha \neq 0$

$(\lambda - \mu)\beta = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0$ $\quad \beta = 0$

$2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\mu = 0$

وهذا يبين أن المجموعة $\{e'_1, e'_2\}$ مستقلة خطياً فوق K

ومنه فإن المجموعة $\{e'_1, e'_2\}$ قاعدة للفضاء أو للجبر A

ليكن $z \in DA = [A, A]$ عندئذ

$z = [x, y]$; $x, y \in A$

$x = \gamma e'_1 + \varepsilon e'_2$, $y = \gamma_1 e'_1 + \varepsilon_1 e'_2$

$\gamma, \gamma_1, \varepsilon, \varepsilon_1 \in K$

نعوض في z

$z = [\gamma e'_1 + \varepsilon e'_2, \gamma_1 e'_1 + \varepsilon_1 e'_2]$

$= \gamma \gamma_1 [e'_1, e'_1] + \gamma \varepsilon_1 [e'_1, e'_2] + \varepsilon \gamma_1 [e'_2, e'_1]$

/ /

الموضوع: ....

$+ \varepsilon\varepsilon_1 [e_2', e_2'] = (\gamma\varepsilon_1 - \varepsilon\gamma_1)[e_1', e_2']$ ($\in K$)

- $[e_1', e_2'] = [\alpha e_1 + \beta e_2 ; \alpha e_1 - \beta e_2]$

$= -\alpha\beta [e_1, e_2] + \beta\alpha [e_2, e_1] = -2\alpha\beta [e_1, e_2]$

نفرض أن $[e_1, e_2] = e$ نجد

~~$z = 2\alpha\beta e$~~

~~$z = \ldots\varepsilon_1$~~ $z = 2\alpha\beta(\varepsilon\gamma_1 - \gamma\varepsilon_1)e$ ($\delta \in K$)

وهذا يبين أن DA فضاء جزئي في A بعد 1

وأن $DA = \{ u.e ; u \in K \}$

إذاً $DA \neq 0$

لدينا $z_0 \in D^2A = [DA, DA]$

$z_0 = [x_0, y_0]$; $x_0, y_0 \in DA$

$x_0 = u_1 e$; $y_0 = u_2 e$

$z = [x_0, y_0] = [u_1 e, u_2 e] = u_1 u_2 [e, e] = 0$

إذاً وهذا يبين أن $D^2A = 0 \Leftarrow$ فإن الجبر A قابل للحل

ملاحظة:

كل جبر لي A فوق حقل K ثلاثي البعد قاعدته e_1, e_2, e_3 تحقق الشروط:

-1- $[e_1, e_2] = ae_1$

-2- $[e_1, e_3] = be_1$

-3- $[e_2, e_3] = ce_1 - fbe_2 + fae_3$

حيث $a, b, c, f \in K$ سلميات للحقل، يكون قابل للحل

الموضوع: ....

البرهان:

ليكن $Z \in DA$ حيث $DA = [A, A]$ عندئذ:

$Z = [x, y]$; $x, y \in A$

وحيث:
$x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$
$y = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$

; $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in K$

$Z = [x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3, \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3]$

$= \alpha\beta' [e_1, e_2] + \alpha\gamma' [e_1, e_3] + \beta\alpha' [e_2, e_1] + \beta\gamma' [e_2, e_3]$

$+ \gamma\alpha' [e_3, e_1] + \gamma\beta' [e_3, e_2]$

$= (\alpha\beta' - \beta\alpha')[e_1, e_2] + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')[e_1, e_3]$

$+ (\beta\gamma' - \gamma\beta')[e_2, e_3] = [(\alpha\beta' - \beta\alpha') a e_1$

$+ (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') b e_1 + (\beta\gamma' - \gamma\beta')(c e_1 - f b e_2 + f a e_3)$

$((\alpha\beta' - \beta\alpha') a - (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') b + (\beta\gamma' - \gamma\beta') c) e_1$
$\theta \in K$

$+ ((\gamma\beta' - \beta\gamma') f b) e_2 + ((\beta\gamma' - \gamma\beta') f a) e_3$

$= \theta e_1 + (\gamma\beta' - \beta\gamma') f (b e_2 - a e_3)$

$\lambda \in K$ $\in K$ $\in A$

$Z = \theta e_1 + \lambda e$; $\theta, \lambda \in K$
$e_1, e \in A$

/ /

الموضوع: ....

ليكن $z_0 \in D^2A$ حيث $D^2A = [DA, DA]$

$z_0 = [x_0, y_0]$; $x_0, y_0 \in DA$

إذاً يمكن أن نكتب:

$x_0 = \theta_1 e_1 + \lambda_1 e$

$y_0 = \theta_2 e_1 + \lambda_2 e$ $\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2 \in K$

$z_0 = [x_0, y_0] = \theta_1 \lambda_2 [e_1, e] + \lambda_1 \theta_2 [e, e_1]$

$= (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_2)[e_1, e] = (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_1)[e_1, be_2 - ae_3]$

$= (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_2)(b[e_1, e_2] - a[e_1, e_3])$

$= (\theta_1 \lambda_2 - \lambda_1 \theta_2)(ba e_1 - ab e_1) = 0$

ومنه $D^2A = 0$ أي أن A قابل للحل.

تمرين: ليكن A جبر لي فوق الحلقة R يحقق:

$[[x, y], y] = 0$ $\forall x, y \in A$

أثبت أن $3[[x, y], z] = 0$ لا يتضمن مصادقة

$\forall x, y, z \in A$

الحل:

ليكن $x, y, z \in A$ عندئذ:

$x, y+z \in A$

$[[x, y+z], y+z] = 0$

$[[x, y] + [x, z], y+z] = 0$

/ /

الموضوع: ....

$[[x,y],y+z] + [[x,z],y+z] = 0$

$= [[x,y],y] + [[x,y],z] + [[x,z],y] + [[x,z],z] = 0$

$[[x,y],z] + [[x,z],y] = 0$

لدينا $[y,[x,z]] + [x,[z,y]] + [z,[x,y]] = 0$

$[y,[x,z]] = -[x,[z,y]] - [z,[y,x]]$

$[[x,z],y] = [x,[z,y]] + [z,[y,x]]$

نعوض في العلاقة الأخيرة

$[[x,y],z] + [x,[z,y]] + [z,[y,x]] = 0$

$[[x,y],z] + [[x,y],z] + [x,[z,y]] = 0$

$2[[x,y],z] + [x,[z,y]] = 0$ (*)

$[x,[z,y]] + [z,[y,x]] + [y,[x,z]] = 0$

$[x,[z,y]] = -[z,[y,x]] - [y,[x,z]]$

$= +[[y,x],z] + [[x,z],y]$

نعوض في (*)

/ /

الموضوع:

$$2[[x,y],z]+[[y,x],z]+[[x,z],y]=0$$ **

$$[[y,x+z],x+z]=0$$

حسب التعريف

$$[[y,x]+[y,z],x+z]=[[y,x],x]+[y,$$

$$=[[y,x],x+z]+[[y,z],x+z]=0$$

$$=[[y,x],x]+[[y,x],z]+[[y,z],x]+[[y,z],z]=0$$

$$[[y,x],z]+[[y,z],x]=0 \quad (1)$$

لدينا:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

$$[[y,z],x]=[y,[z,x]]+[z,[x,y]]$$

نعوض في (1)

$$[[y,x],z]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

$$2[[y,x],z]+[y,[z,x]]=0 \quad (2)$$

نجمع 2 بالـ (**)

$$[y,[z,x]]+[x,[z,y]]\neq 0$$

$$[y,[z,x]]+[[y,x],z]+[[x,z],y]=0$$

$$2[y,[z,x]]+[[y,x],z]=0$$

$$[[x,y],z],y+z]=0$$

لديا
وجدناه

- $$2[[[x,y],z]+[[x,y],[z,y]]=0$$

$$[[y,x+z],x+z]=0$$

- $$[[x,y],z]+[[y,z],x]=0$$

لديا
وجدنات
سموت

$$[[x,y],z]+[x,[y,z]]=0$$

$$3[[x,y],z]=0$$

الموضوع:

تمرين [2]: أثبت أن: $[[[x,y],z],t]=0$

ضمن فرضيات التمرين السابق، واعتمادا على تمرين [3] في المحاضرة 15

تمهيدية: كل جبر لي جزئي من جبر لي قابل للحل يكون قابل للحل

البرهان:

ليكن A جبر لي قابل للحل فوق الحلقة $\mathbb{R}$

وليكن B جبر لي جزئي في A عندئذ يوجد $n\in N$ بحيث

$D^nA=0$.

لنبرهن أن $D^nB\subseteq D^nA=0$ ممكن أن نبرهن بالتراجع على n

ولكي يكون $D^nB=0$

$$D^0B=B\subseteq A=D^0A$$

$$D^1B=[B,B]\subseteq[A,A]=DA$$

لنفرض أنه لأجل $n=k$ فإن

$$D^kB\subseteq D^kA$$

فيكون $D^{k+1}B$

$$D^{k+1}B=[D^kB,D^kB]\subseteq[D^kA,D^kA]\subseteq D^{k+1}A$$

$\Leftarrow$ $D^nB=0$

تمهيدية: ليكن $f:A\longrightarrow A'$ تشاكل جبور لي فوق $\mathbb{R}$ عندئذ:

1- $f([A,A])=[f(A),f(A)]$

2- إذا كان A قابل للحل فإن $\operatorname{Im} f$ يكون قابل للحل.

البرهان:

1- ليكن $y\in f([A,A])$ عندئذ $y=f(x)\ ;\ x\in[A,A]$

$x=[a,b]\ ;\ a,b\in A$

$$y=f(x)=f([a,b])=[f(a),f(b)]\in[f(A),f(A)]$$

$$f([A,A])\subseteq[f(A),f(A)]$$

/ /

الموضوع: ....

الاحتواءات المعاكسة نثبتها بنفس الطريقة.

2 - يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $D^n A = 0$

لنبرهن على أن لأجل كل $k \in \mathbb{N}$ فإن $f(D^k A) = D^k f(A)$

$n = 0$ ؛ $f(A) = f(A)$

$f(D^0 A) = D^0 f(A)$

$n = 1$ $\quad DA = [A, A]$

$f(DA) = f([A, A]) = [f(A), f(A)] = Df(A)$.

لنفرض أن المساواة صحيحة لأجل t

$$f(D^t A) = D^t f(A)$$

$$f(D^{t+1} A) = f([D^t A, D^t A]) = [f(D^t A), f(D^t A)]$$

$$= [D^t f(A), D^t f(A)] = D^{t+1} f(A)$$

$D^n f(A) = f(D^n A) = f(0) = 0$ ،

وهذا يبين أن الجبر الجزئي $Im f$ قابل للحل.

نتيجة: ليكن A جبر لي قابل للحل و I مثالي في A عندئذ جبر لي الخارج A/I قابل للحل.

البرهان:

وجدنا أن الطبيق $\pi : A \to A/I$ المعرف بالشكل $\forall a \in A ; \pi(a) = a + I$ تشاكل جبور لي غامر

ومن النتيجة السابقة فإن $Im \pi = A/I$ قابل للحل

□□□